BAB I PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Ruang barisan merupakan ruang linear yang di dalamnya beranggotakan barisan - barisan dengan karateristik tertentu [1]. Beberapa ruang barisan yang sudah dikenal di antaranya ruang barisan terbatas, ruang barisan konvergen, ruang barisan konvergen ke nol dilambangkan secara berurut l_∞, c, dan c_0.

N. L Carothers [2] mendefinisikan ruang l_∞ merupakan himpunan dari semua barisan terbatas. l_∞ yang terdiri dari $x \in s$ yang mana

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k| < \infty, \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Ada dua subruang (tertutup) dari ruang l_∞ yaitu ruang c terdiri dari himpunan barisan konvergen dan ruang c_0 terdiri dari himpunan barisan konvergen ke 0. Dengan demikian terdapat hubungan antar kelas yaitu $c_0 \subset c \subset l_\infty$.

Diberikan l_∞, c, dan c_0 masing-masing ruang barisan bilangan kompleks terbatas, konvergen, dan konvergen ke nol. Jika $\Delta x = x_k - x_{k+1}, \forall\, k \in \mathbb{N}$. Kizmaz [3] mendefinisikan ruang barisan

$$\begin{aligned} l_\infty(\Delta) &= \{x = (x_k) :\ \Delta x \in l_\infty\} \\ c\,(\Delta) &= \{x = (x_k) :\ \Delta x \in c\} \\ c_0(\Delta) &= \{x = (x_k) :\ \Delta x \in c_0\} \end{aligned}$$

Untuk $m, k \in \mathbb{N}$, $\Delta^0 x = (x_k), \Delta\, x = (x_k - x_{k+1})$, $\Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$ dan $\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v}\, x_{k+v}$. Mikail Et. [4] mendefinisikan

$$\begin{aligned} l_\infty(\Delta^m) &= \{x = (x_k) :\ \Delta^m x \in l_\infty\} \\ c\,(\Delta^m) &= \{x = (x_k) :\ \Delta^m x \in c\} \\ c_0(\Delta^m) &= \{x = (x_k) :\ \Delta^m x \in c_0\} \end{aligned}$$

Diperoleh hubungan antar ruang adalah $c_0(\Delta^m) \subset c\,(\Delta^m) \subset l_\infty(\Delta^m)$. Untuk setiap $m \in \mathbb{N}, \Delta_m x_k = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{v}\, x_{k+m-i}$. H. Suharna [5] mendefinisikan

$$\begin{aligned} l_\infty(\Delta_m) &= \{x = (x_k) :\ \Delta_m x \in l_\infty\} \\ c\,(\Delta_m) &= \{x = (x_k) :\ \Delta_m x \in c\} \\ c_0(\Delta_m) &= \{x = (x_k) :\ \Delta_m x \in c_0\} \end{aligned}$$

Diperoleh hubungan antar kelas adalah $c_0(\Delta_m) \subset c\,(\Delta_m) \subset l_\infty(\Delta_m)$. M. Ahmad [6] mendefinisikan beberapa ruang barisan vektor

$$\begin{aligned} l_\infty^n &= \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(\mathbb{R}^n) : sup_k \|x_k\| < \infty\} \\ c^n &= \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(\mathbb{R}^n) : (x_k)\ kovergen\} \\ c_0^n &= \{\bar{x} = (x_k) \in \omega(\mathbb{R}^n) : (x_k)\ konvergen\ ke\ 0\} \end{aligned}$$

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ diperoleh hubungan antar ruang adalah $c_0^n \subset c^n \subset l_\infty^n$.

Diberikan $(X, \|.\|)$ ruang bernorma. Ruang X dikatakan lengkap terhadap norma $\|.\|$ jika untuk setiap barisan Cauchy di X merupakan barisan konvergen di X. Selanjutnya, ruang bernorma yang lengkap disebut ruang Banach [1].

Berdasarkan penelitian M. Ahmad [6] tentang ruang barisan vektor ${}^{n}l_{\infty}, {}^{n}c,$ dan ${}^{n}c_{0}$. Timbul ide atau permasalahan, bagaimana jika untuk setiap x_k (elemen barisan) berisi barisan sehingga

$$(x_k) = \{(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \dots) \mid x_{ki} \in \mathbb{R}^n, \forall\, k \in \mathbb{N}, i = 1,2,3, \dots, n.\}$$

Oleh karena itu, pada skripsi ini akan didefinisikan untuk ruang barisan vektor ${}^{n}l_{\infty}, {}^{n}c,$ dan ${}^{n}c_{0}$ sehingga dalam penelitian akan menyelidiki sifat kelengkapan dan menganalisis hubungan antar ruang barisan vektor ${}^{n}l_{\infty}, {}^{n}c,$ dan ${}^{n}c_{0}$.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, diperoleh rumusan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana sifat kelengkapan pada ruang barisan vektor ${}^{n}l_{\infty}, {}^{n}c,$ dan ${}^{n}c_{0}$?
2. Bagaimana hubungan antar kelas ${}^{n}l_{\infty}, {}^{n}c,$ dan ${}^{n}c_{0}$?

C. Batasan Masalah

Batasan masalah adalah sifat kelengkapan dan hubungan antar ruang barisan vektor ${}^{n}l_{\infty}, {}^{n}c,$ dan ${}^{n}c_{0}$.

D. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini sebagai berikut :

1. Menyelidiki sifat kelengkapan pada ruang barisan vektor ${}^{n}l_{\infty}, {}^{n}c,$ dan ${}^{n}c_{0}$.
2. Menyelidiki hubungan antar kelas ${}^{n}l_{\infty}, {}^{n}c,$ dan ${}^{n}c_{0}$.

E. Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan tersebut, diperoleh manfaat dari penelitian ini adalah sebagai referensi ilmiah penelitian berikutnya pada ruang barisan vektor ${}^{n}l_{\infty}, {}^{n}c,$ dan ${}^{n}c_{0}$.