

BAB II KAJIAN TEORI

A. Studi Pustaka

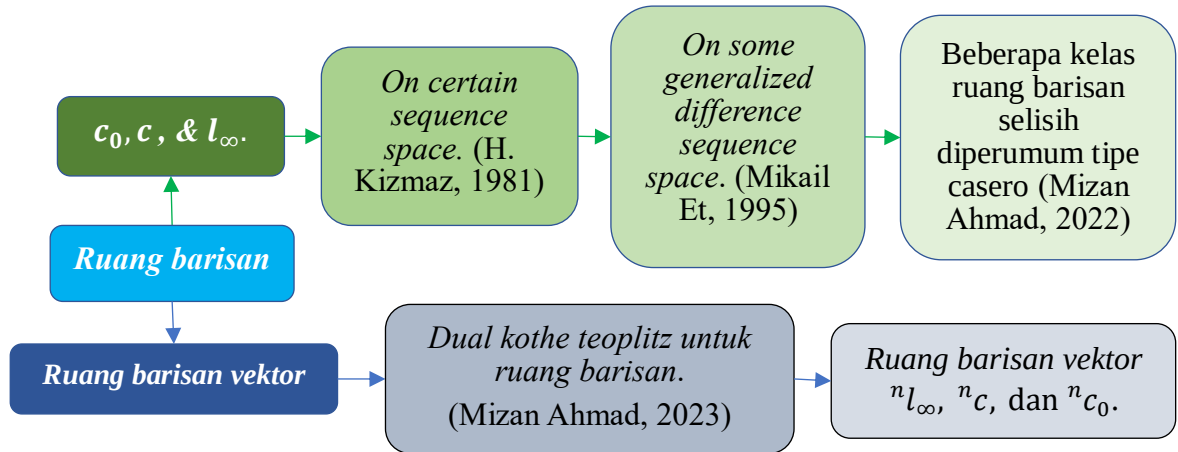
Dalam melakukan penelitian skripsi, beberapa jurnal yang digunakan sebagai studi literatur dan memiliki keterkaitan terhadap penelitian yang akan dilakukan. Berikut adalah beberapa penelitian yang terkait dengan penelitian ini.

Tabel 1. Penelitian terkait

No	Peneliti	Keterangan Penelitian
1.	Mizan Ahmad (2023)	Judul: Dual kothe-teopltitz untuk ruang barisan vektor. Metode: Studi literatur. Hasil Penelitian: Diperoleh kelengkapan masing-masing kelas dan hubungan antar ruang. Dikonstruksikan dual Kothe-Toeplitz untuk c^n dan l_∞^n [6].
2.	Mizan Ahmad dan Riski Aspriyani (2022)	Judul: Ruang barisan selisih diperumum tipe cesaro pada ruang bernorma-n. Metode: Studi literatur. Hasil Penelitian: Diperoleh kelengkapan masing-masing kelas dan hubungan antar ruang. Dikontruksikan dual Kothe-Toeplitz dari beberapa ruang barisan selisih diperumum Cesaro pada ruang bernorma-n [7].
3.	Mizan Ahmad (2022)	Judul: Beberapa kelas ruang barisan selisih diperumum tipe casero. Metode: Studi literatur. Hasil Penelitian: Diperoleh kelengkapan masing-masing kelas dan hubungan antar kelas. Dikonstruksikan dual Kothe-Toeplitz untuk $l_\infty(\Delta_g^m)$, $c_\infty(\Delta_g^m)$, dan $o_\infty(\Delta_g^m)$ [8].
4.	Hery Suharna (2013)	Judul: Ruang barisan selisih $c_0(\Delta_m)$, $c(\Delta_m)$, $l_\infty(\Delta_m)$, dan $l_p(\Delta_m)$. Metode: Studi literatur. Hasil Penelitian : Ruang barisan $c_0(\Delta_m)$, $c(\Delta_m)$, $l_\infty(\Delta_m)$, dan $l_p(\Delta_m)$, $\forall m \in \mathbb{N}$ adalah ruang BK [5].
5.	Mikail ET dan Rifat Colak (1995)	Judul: <i>On some generalized difference sequence space.</i> Metode: Studi literatur. Hasil Penelitian: <i>The result sequence space $l_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$, and $c_0(\Delta^m)$, $m \in \mathbb{N}$. where for instance $l_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) : (\Delta^m x_k) \in l_\infty\}$, give some topological properties, inclusion relation of these space and compute their continuous and kothe-toeplitz duals [4].</i>
6.	H. KIZMAZ (1981)	Judul: <i>On certain sequence space.</i> Metode: Studi literatur. Hasil Penelitian: <i>Obtain the completeness of each class and the relationship between classes. Obtain some results useful in the characterization of certain matrix maps [3].</i>

Untuk merepresentasikan ide, informasi, dan konsep dari penelitian atau jurnal yang terkait dapat disajikan dalam bentuk *mind map* sebagai berikut :

Gambar 1. Mind map.



B. Landasan Teori

1. Ruang Vektor

Berikut ini akan dibahas sifat aljabar dari $\mathbb{R}$, definisi ruang vektor, definisi subruang, definisi supremum, dan teorema ketidaksamaan segitiga mutlak.

Definisi 1.1 Sifat Aljabar dari $\mathbb{R}$

Himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian memenuhi beberapa sifat – sifat sebagai berikut [11], $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})$ berlaku:

1. $a + b \in \mathbb{R}$. (Sifat tertutup (+))
2. $(a + b) + c = a + (b + c) \in \mathbb{R}$. (Sifat asosiatif (+))
3. $a + 0 = 0 + a = a$. (Sifat identitas (+))
4. $a + (-a) = (-a) + a = 0$. (Sifat invers (+))
5. $a + b = b + a$. (Sifat komutatif (+))
6. $ab \in \mathbb{R}$. (Sifat tertutup (·))
7. $(ab)c = a(bc) \in \mathbb{R}$. (Sifat asosiatif (·))
8. $(a + b)c = ac + bc$. (Sifat distributif (·))

Sifat aljabar dari bilangan real, seperti penjumlahan dan perkalian skalar, membentuk dasar dari struktur ruang vektor. Berikut definisi dari ruang vektor.

Definisi 1.2 Diberikan $x, y, z \in V$ dan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. V dikatakan ruang vektor jika memenuhi aksioma berikut [12]:

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. ada $0 \in V$ sehingga $x + 0 = x$.
4. $\forall x \in V$, ada $-x \in X$ sehingga $x + (-x) = 0$.
5. $1x = x$.
6. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
8. $\alpha(\beta x) = (\alpha \cdot \beta)x$.

Contoh : Diberikan $\omega(\mathbb{R}^n) = \{x = (x_k) : x_k \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}\}$. Buktikan $\omega(\mathbb{R}^n)$ merupakan ruang vektor.

Bukti. Diambil sebarang $x, y, z \in \omega(\mathbb{R}^n)$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$ maka

1. $x + y = (x_k) + (y_k) = (x_k + y_k) = (y_k + x_k) = (y_k) + (x_k) = y + x$.
2. $(x + y) + z = (x_k + y_k) + (z_k) = (x_k + y_k + z_k) = (x_k) + (y_k + z_k) = x + (y + z)$.
3. $\exists \mathbf{0} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \right) \in \omega(\mathbb{R}^n) \ni x + \mathbf{0} = (x_k) + \mathbf{0} = (x_k + 0) = (x_k) = x$.
4. $\forall x \in \omega(\mathbb{R}^n), \exists -x \in \omega(\mathbb{R}^n)$,
sehingga $x + (-x) = (x_k) + (-x_k) = (x_k - x_k) = 0$.
5. $1 \cdot x = 1 \cdot (x_k) = (x_k) = x$.
6. $\alpha(x + y) = \alpha((x_k) + (y_k)) = \alpha(x_k) + \alpha(y_k) = \alpha x + \alpha y$.
7. $(\alpha + \beta)x = (\alpha + \beta)(x_k) = \alpha(x_k) + \beta(x_k) = \alpha x + \beta x$.
8. $\alpha(\beta x) = \alpha(\beta(x_k)) = (\alpha\beta)(x_k) = (\alpha\beta)x$.

Terbukti $\omega(\mathbb{R}^n)$ merupakan ruang vektor. ■

Dalam koleksi barisan vektor $\omega(\mathbb{R}^n)$, beberapa ruang barisan vektor menjadi bagian dari $\omega(\mathbb{R}^n)$. Berikut merupakan definisi subruang.

Definisi 1.3 *S disebut subruang dari V, jika S adalah subset tidak kosong dari ruang vektor V dan S memenuhi kondisi berikut [12] :*

1. $\alpha x \in S$.
2. $x + y \in S, \forall x, y \in S$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

Contoh : Diberikan $W = \{(a, 0)^T \mid a \in \mathbb{R}\}$. Buktikan W subruang dari $\mathbb{R}^2$.

Bukti. Diambil $c \in \mathbb{R}$ dan $v = (a, 0)^T, w = (b, 0)^T \in W, \forall a, b \in \mathbb{R}$, berlaku:

1. $cv = c(a, 0)^T = (ca, 0)^T \in W$.
2. $v + w = (a, 0)^T + (b, 0)^T = (a + b, 0)^T \in W$.

Jadi terbukti W subruang dari $\mathbb{R}^2$. ■

Supremum dari suatu himpunan bilangan real adalah batas atas terkecil yang masih lebih besar atau sama dengan semua elemen dalam himpunan tersebut.

Definisi 1.4 *Diberikan $u = \sup S$ dari $S \subset \mathbb{R}$ jika dan hanya jika memenuhi 2 kondisi [11] :*

1. $u \geq s, \forall s \in S$.
2. *Jika $v < u, v \in \mathbb{R}$, maka $\exists s' \in S, \exists v < s'$.*

Contoh : Diberikan $B = \left(\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right)$. Buktikan bahwa $\sup B = 1$.

Bukti. Andaikan $u \neq 1$. Pada kasus $u < 1$. Diambil sebarang $u < 1$, terdapat $1 \in B$ maka u bukan batas atas dari B . Pada kasus $u > 1$. Diambil sebarang $u > 1$, karena $\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1$ maka u bukan batas terkecil B . Pengandaian tersebut menimbulkan kontradiksi. Dapat disimpulkan bahwa $\sup B = 1$. ■

Berdasarkan definisi dan contoh diatas, selanjutnya akan dibahas sifat supremum.

Definisi 1.5 Sifat Supremum Diberikan A dan B masing masing himpunan bagian tak kosong di dalam $\mathbb{R}$, dengan $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ berlaku [11] :

$$\sup\{A + B\} = \sup A + \sup B.$$

Bukti. Akan ditunjukkan $\sup\{A + B\} \leq \sup A + \sup B$. Diberikan $a + b \in A + B$.

Berdasarkan sifat supremum maka $a \leq \sup A$ dan $b \leq \sup B$ berlaku :

$$a + b \leq \sup A + \sup B \text{ maka } \sup\{A + B\} \leq \sup A + \sup B.$$

Akan ditunjukkan $\sup A + \sup B \leq \sup\{A + B\}$. Diberikan $a \in A$, maka untuk setiap $b \in B$ berlaku $a + b \leq \sup\{A + B\}$ maka $a \leq \sup\{A + B\} - b$.

$\sup\{A + B\} - b$ adalah batas atas dari A , maka $\sup A \leq \sup\{A + B\} - b$ maka $b \leq \sup\{A + B\} - \sup A$. Jadi $\sup\{A + B\} - \sup A$ adalah batas atas dari B , maka $\sup B \leq \sup\{A + B\} - \sup A$ dengan demikian $\sup A + \sup B \leq \sup\{A + B\}$. Diperoleh $\sup\{A + B\} = \sup A + \sup B$. ■

Ketaksamaan segitiga menyatakan bahwa panjang satu sisi segitiga tidak pernah lebih besar dari jumlah panjang dua sisi lainnya. Berdasarkan hal tersebut diperoleh teorema berikut.

Teorema 1.6 Jika $a, b \in \mathbb{R}$ maka $|a - b| \leq |a| + |b|$ [11].

Bukti. Berdasarkan ketaksamaan segitiga mutlak berlaku $|a + b| \leq |a| + |b|$. Substitusi $b = -b$, diperoleh $|a - b| \leq |a| + |b|$.

Jadi terbukti $|a - b| \leq |a| + |b|$. ■

2. Barisan Bilangan Real

Berikut akan dibahas mengenai definisi barisan bilangan real, definisi barisan konvergen, definisi barisan divergen, kriteria divergen, definisi barisan bagian, definisi barisan Cauchy, dan definisi barisan terbatas.

Definisi 2.1 Barisan bilangan real adalah suatu fungsi dengan domain himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$ dengan range termuat di dalam $\mathbb{R}$ [11].

Contoh : $y = (2k)_{k=1}^{\infty} = (2, 4, 6, \dots)$.

Definisi 2.2 Diberikan $X = (x_k)$ dikatakan konvergen ke L ($x_k \rightarrow L$) atau L adalah limit dari (x_k) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k > n_0$ berlaku $|x_k - L| < \varepsilon$ [11].

Contoh : barisan $(x_k) = ((1)^k), k \in \mathbb{N}$. Bukti $x_k \rightarrow 1$.

Bukti. Diambil $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists \forall k \geq n_0$ berlaku $|x_k - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$.
Jadi terbukti $x_k \rightarrow 1$. ■

Jika suatu barisan konvergen ke suatu limit, maka setiap subbarisan yang diambil dari barisan tersebut juga akan konvergen ke limit yang sama. Berikut merupakan definisi dari barisan bagian (subbarisan).

Definisi 2.3 Diberikan (x_k) barisan bilangan real dan $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ barisan bilangan real yang naik tegas (strictly increasing). Maka barisan (x_{r_k}) ditulis $(x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_k}, \dots)$ disebut barisan bagian dari (x_k) [13].

Contoh : Diberikan barisan $(x_k) = (1, 2, 3, \dots)$. Contoh barisan bagiannya adalah $(x_{k_1}) = (1, 3, 5, \dots)$, $(x_{k_2}) = (2, 4, 6, \dots)$.

Dalam beberapa kasus, subbarisan dari barisan yang divergen dapat memiliki sifat konvergen jika dipilih dengan tepat. Berikut definisi kriteria divergen.

Definisi 2.4 Kriteria Divergen X dikatakan divergen jika barisan bilangan real $X = (x_k)$ memiliki salah satu dari sifat berikut [13].

- i. X memiliki 2 subspace yang konvergen $X' = (x_{r_k})$ dan $X'' = (x_{n_k})$ yang limitnya tidak sama.
- ii. X tak terbatas.

Contoh : Barisan $(x_k) = ((-1)^k)$ adalah divergen.

Bukti. Dibentuk subsequence $(x_{n_k}) = (1, 1, \dots)$ dan $(x_{m_k}) = (-1, -1, \dots)$.

$x_{n_k} \rightarrow 1$ sebab, diberikan $\varepsilon > 0$. $\exists n_1 \in \mathbb{N} \exists \forall n_k \geq n_1$ berlaku

$$|x_{n_k} - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon.$$

$x_{m_k} \rightarrow -1$ sebab, diambil $\varepsilon > 0$. $\exists m_1 \in \mathbb{N} \exists \forall m_k \geq m_1$ berlaku

$$|x_{m_k} + 1| = |-1 + 1| = 0 < \varepsilon.$$

Berdasarkan 2.4 (i) disimpulkan (x_k) divergen. ■

Jika suatu barisan adalah Cauchy, maka secara umum ia cenderung konvergen dalam ruang metrik lengkap, sedangkan barisan yang divergen tidak memenuhi sifat Cauchy karena elemen-elemennya tidak semakin dekat satu sama lain seiring bertambahnya indeks. Berikut merupakan definisi barisan Cauchy.

Definisi 2.5 Diberikan $X = (x_k)$ dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k, l > n_0$, berlaku $|x_k - x_l| < \varepsilon$ [1].

Contoh : Barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{n} : k \in \mathbb{N}\right)$ merupakan barisan Cauchy.

Bukti. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Menurut sifat Archimedes, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$.
 $\forall m, n > n_0$ berlaku $|x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Jadi terbukti (x_n) merupakan barisan Cauchy. ■

Berdasarkan definisi dari barisan konvergen dan barisan Cauchy diperoleh teorema berikut.

Teorema 2.6 Barisan konvergen jika dan hanya jika barisan Cauchy.

Bukti. $(\Rightarrow)$ Misalkan (x_k) barisan Cauchy akan ditunjukkan (x_k) barisan konvergen.

Karena (x_k) konvergen maka $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ni \forall m, n \geq n_0$ berlaku

$$|x_m - L| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Perhatikan bahwa $|x_m - x_n| = |x_m - L + L - x_n| \leq |x_m - L| + |L - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$(\Leftarrow)$ Misalkan (x_k) barisan konvergen akan ditunjukkan (x_k) barisan Cauchy.

Karena (x_k) Cauchy maka (x_k) terbatas. Berdasarkan Teorema Bolzano weierstrass maka (x_k) memiliki sub barisan yang konvergen. Misal (x_a) subbarisan dari (x_k) dan $(x_a) \rightarrow L \in \mathbb{R}$. Diambil $\frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \ni \forall k, a \geq n_1$ berlaku $|x_k - x_a| < \frac{\varepsilon}{2}$. $\exists n_2 \in \mathbb{N}, \ni \forall a \geq n_2$ berlaku $|x_a - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall k, a \geq \max\{n_1, n_2\}$ berlaku

$$|x_k - L| = |x_k - x_a + x_a - L| \leq |x_k - x_a| + |x_a - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Jadi terbukti Barisan konvergen jika dan hanya jika barisan Cauchy. ■

Definisi 2.7 Barisan bilangan real (x_k) dikatakan terbatas, jika terdapat bilangan real $M > 0$, sehingga $|x_k| \leq M$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ [11].

Contoh : Barisan $(x_k) = \left(\frac{1}{k}\right)_{k=1}^{\infty}$, (x_k) terbatas.

Bukti. $|x_k| = \left|\frac{1}{k}\right| \leq 1 = M$. Jadi terbukti (x_k) terbatas. ■

3. Ruang Bernorma

Berikut akan dibahas definisi dari ruang bernorma, barisan konvergen terhadap norma, barisan divergen terhadap norma, barisan Cauchy terhadap norma, ruang barisan c_0, c , dan l_∞ , ruang Banach, dan beberapa teorema.

Definisi 3.1 Diberikan X ruang vector atas $\mathbb{R}$. Suatu fungsi bernilai real $\|\cdot\|$ pada X yang memenuhi [1]:

- i. $\|x\| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$.
- ii. $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = \mathbf{0}$ (vektor nol).
- iii. $\|\alpha x\| = \|\alpha\| \cdot \|x\|$ untuk setiap skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x \in X$.
- iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$.

Disebut norma pada X . Pasangan $(X, \|\cdot\|)$ disebut ruang bernorma atau ditulis X ruang bernorma.

Contoh : Terdapat pada **Teorema 3.5**.

Dalam ruang bernorma, suatu barisan dikatakan konvergen terhadap norma jika norma selisih antara elemen-elemen barisan dan limitnya menjadi semakin kecil mendekati nol. Berikut merupakan definisi konvergen dan barisan Cauchy terhadap norma.

Definisi 3.2 Diberikan X ruang bernorma dan barisan (x_k) di dalam X [1].

- i. Barisan (x_k) dikatakan konvergen ke $L \in X$ terhadap norma $\|\cdot\|$ jika $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - L\| = 0$, Yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k > n_0$, berlaku $\|x_k - L\| < \varepsilon$.
- ii. Barisan (x_k) disebut barisan Cauchy terhadap norma $\|\cdot\|$ jika $\lim_{k, l \rightarrow \infty} \|x_k - x_l\| = 0$, Yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $k, l > n_0$, berlaku $\|x_k - x_l\| < \varepsilon$.

Contoh :

- i. Diberikan $(x_k) = ((2, 2, 2, \dots))$. Akan ditunjukkan $x_k \rightarrow 2$.
Bukti. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \exists \forall k \geq n_1$ berlaku $\|x_k - 2\| = \|2 - 2\| = 0 < \varepsilon$. Jadi $x_k \rightarrow 2$.
- ii. Diberikan $(x_k) = \left(\left(\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\right)\right)$ merupakan barisan Cauchy.

Bukti. Diambil $\varepsilon > 0$. Menurut sifat Archimedes, $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \exists \forall \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Jadi $\forall m, n > n_0$ berlaku $\|x_m - x_n\| = \left\|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right\| \leq \left\|\frac{1}{m}\right\| + \left\|\frac{1}{n}\right\| \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
 Jadi x_k merupakan barisan Cauchy. ■

Definisi 3.3 Diberikan $(X, \|\cdot\|)$ ruang bernorma. Ruang X dikatakan lengkap terhadap norma $\|\cdot\|$ jika untuk setiap barisan Cauchy di X merupakan barisan konvergen di X . Ruang bernorma yang lengkap disebut ruang Banach [1].

Contoh : Terdapat pada **Teorema 3.6**.

Selanjutnya akan dibahas untuk definisi dari barisan l_∞, c , dan c_0 . Lebih lanjut akan dibuktikan terhadap ruang bernorma dan ruang Banach sebagai berikut.

Definisi 3.4 Diberikan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dan $\omega(\mathbb{R}) = \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_k \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}\}$. N. L. Carothers [2] mendefinisikan

$$\begin{aligned} l_\infty &= \{x = (x_k) \in \omega(\mathbb{R}) : \sup_k |x_k| < \infty\} \\ c &= \{x = (x_k) \in \omega(\mathbb{R}) : (x_k) \text{ konvergen}\} \\ c_0 &= \{x = (x_k) \in \omega(\mathbb{R}) : (x_k) \text{ konvergen ke } 0\} \end{aligned}$$

Dengan normanya, $\|x\| = \sup_k |x_k|, \forall k \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.5 Ruang l_∞, c , dan c_0 merupakan ruang bernorma.

Bukti.

1. Akan ditunjukkan ruang barisan l_∞ merupakan ruang bernorma.

Diambil sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x, y \in l_\infty, \forall k \in \mathbb{N}$ berlaku

a. Karena $0 \leq |x_k|$ maka $0 \leq |x_k| \leq \sup_k |x_k| = \|x\|$.

b. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$ (vektor nol).

($\Rightarrow$) Karena $\|x\| = \sup_k |x_k| = 0$, maka $|x_k| = \mathbf{0}$, jadi $x = (x_k) = \mathbf{0}$.

($\Leftarrow$) Karena $x = (0, 0, 0, \dots)$ maka $|x_k| = \mathbf{0}$, jadi $\|x\| = \sup_k |x_k| = 0$.

c. $\|\alpha x\| = \sup_k |\alpha x_k| = \sup_k |\alpha| |x_k| = |\alpha| \sup_k |x_k| = \|\alpha\| \|x\|$.

d. Berdasarkan 1.5 Sifat supremum diperoleh

$$\|x + y\| = \sup_k |x_k + y_k| \leq \sup_k |x_k| + \sup_k |y_k| = \|x\| + \|y\|.$$

Jadi terbukti $(l_\infty, \|\cdot\|_{l_\infty})$ adalah ruang bernorma.

2. Akan ditunjukkan ruang barisan c merupakan ruang bernorma.

Diambil sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x, y \in c, \forall k \in \mathbb{N}$ berlaku :

a. Karena $0 \leq |x_k|$ maka $0 \leq |x_k| \leq \sup_k |x_k| = \|x\|$.

b. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$ (vektor nol).

($\Rightarrow$) Karena $\|x\| = \sup_k |x_k| = 0$, maka $|x_k| = \mathbf{0}$, jadi $x = (x_k) = \mathbf{0}$.

($\Leftarrow$) Karena $x = (0, 0, 0, \dots)$ maka $|x_k| = \mathbf{0}$, jadi $\|x\| = \sup_k |x_k| = 0$.

c. $\|\alpha x\| = \sup_k |\alpha x_k| = \sup_k |\alpha| |x_k| = |\alpha| \sup_k |x_k| = \|\alpha\| \|x\|$.

d. Berdasarkan 1.5 Sifat supremum diperoleh

$$\|x + y\| = \sup_k |x_k + y_k| \leq \sup_k |x_k| + \sup_k |y_k| = \|x\| + \|y\|.$$

Jadi terbukti $(c, \|\cdot\|_c)$ adalah ruang bernorma.

3. Akan ditunjukkan ruang barisan c_0 merupakan ruang bernorma.

Diambil sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x, y \in c_0, \forall k \in \mathbb{N}$ berlaku:

a. Karena $0 \leq |x_k|$ maka $0 \leq |x_k| \leq \sup_k |x_k| = \|x\|$.

b. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$ (vektor nol).

($\Rightarrow$) Karena $\|x\| = \sup_k |x_k| = 0$, maka $|x_k| = \mathbf{0}$, jadi $x = (x_k) = \mathbf{0}$.

($\Leftarrow$) Karena $x = (0, 0, 0, \dots)$ maka $|x_k| = \mathbf{0}$, jadi $\|x\| = \sup_k |x_k| = 0$.

c. $\|\alpha x\| = \sup_k |\alpha x_k| = \sup_k |\alpha| |x_k| = |\alpha| \sup_k |x_k| = \|\alpha\| \|x\|$.

d. Berdasarkan 1.5 Sifat supremum diperoleh

$$\|x + y\| = \sup_k |x_k + y_k| \leq \sup_k |x_k| + \sup_k |y_k| = \|x\| + \|y\|.$$

Jadi terbukti $(c_0, \|\cdot\|_{c_0})$ adalah ruang bernorma. ■

Teorema 3.6 Ruang $(A, \|\cdot\|_A)$, dengan $A = l_\infty, c, c_0$ merupakan ruang Banach.

Bukti.

1. Akan ditunjukkan $(l_\infty, \|\cdot\|_{l_\infty})$ merupakan ruang Banach.

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan $(x_k^s) = (x_1^s, x_2^s, x_3^s, \dots)$ barisan Cauchy di dalam l_∞ , maka $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \exists \forall s, t \geq n_1$ dan $k \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\|x^s - x^t\|_{l_\infty} < \varepsilon \Rightarrow \sup_k |x_k^s - x_k^t| < \varepsilon \Rightarrow |x_k^s - x_k^t| < \varepsilon. \quad (1.1)$$

Diperoleh $(x_k^s)_{s=1}^\infty, \forall k \in \mathbb{N}$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Berdasarkan Teorema 2.6 diperoleh $(x_k^s)_{s=1}^\infty$ konvergen, misal ke $x_k \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain, $\lim_{s \rightarrow \infty} x_k^s = x_k, \forall k \in \mathbb{N}$. (1.2)

Dibentuk $x = (x_k), \forall k \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan bahwa $x \in l_\infty$. Karena $(x_k^s) \in l_\infty$ maka $\sup_k |x_k^s| \leq M. \exists \forall s \geq n_1$ dan $k \in \mathbb{N}$ berlaku

$$|x_k| \leq \sup_k |x_k - x_k^s + x_k^s| \leq \sup_k |x_k - x_k^s| + \sup_k |x_k^s| < \varepsilon + M < \infty.$$

Jadi $x \in l_\infty$. Berdasarkan persamaan (1.1) dan (1.2), $\forall s \geq n_1$ berlaku

$$\|x^s - x\|_{l_\infty} = \sup_k |x_k^s - x_k| = \sup_k \left| x_k^s - \lim_{s \rightarrow \infty} x_k^s \right| = \lim_{s \rightarrow \infty} \sup_k |x_k^s - x_k^s| < \varepsilon.$$

Dengan demikian, l_∞ ruang Banach terhadap norma $\|\cdot\|_{l_\infty}$.

2. Akan ditunjukkan $(c, \|\cdot\|_c)$ merupakan ruang Banach.

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan $(x_k^s) = (x_1^s, x_2^s, x_3^s, \dots)$ barisan Cauchy di dalam c , maka $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \exists \forall s, t \geq n_1$ dan $k \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\|x^s - x^t\|_c < \varepsilon \Rightarrow \sup_k |x_k^s - x_k^t| < \varepsilon \Rightarrow |x_k^s - x_k^t| < \varepsilon. \quad (1.3)$$

Diperoleh $(x_k^s)_{s=1}^\infty, \forall k \in \mathbb{N}$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Berdasarkan Teorema 2.6 diperoleh $(x_k^s)_{s=1}^\infty$ konvergen, misal ke $x_k \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Diberikan $\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \exists \forall s \geq n$ dan $k \in \mathbb{N}$ berlaku $|x_k^s - x_k| < \frac{\varepsilon}{3}$. (1.4)

Dibentuk $x = (x_k), \forall k \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan bahwa $x \in c$. Ketika x^s (baris ke s dari x) adalah barisan Cauchy, $\exists M \ni k, l \geq M$ berlaku $|x_k^s - x_l^s| < \frac{\varepsilon}{3}$.

$\forall s \geq n$ dan $k, l \geq M$, berlaku $|x_k - x_l| \leq |x_k - x_k^s| + |x_k^s - x_l^s| + |x_l^s - x_l| < \varepsilon$.

Diperoleh $(x_k), \forall k \in \mathbb{N}$ merupakan barisan Cauchy, Berdasarkan Teorema 2.6 diperoleh $(x_k), \forall k \in \mathbb{N}$ konvergen, jadi $x \in c$. Berdasarkan persamaan (1.4), $\forall s > n$ berlaku $\|x^s - x\|_c = \sup_k |x_k^s - x_k| \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Dengan demikian, c ruang Banach terhadap norma $\|\cdot\|_c$.

3. Akan ditunjukkan $(c_0, \|\cdot\|_{c_0})$ merupakan ruang Banach.

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan $(x_k^s) = (x_1^s, x_2^s, x_3^s, \dots)$ barisan Cauchy di dalam c_0 , maka $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \exists \forall s, t > n_1$ dan $k \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\|x^s - x^t\|_{c_0} < \varepsilon \Rightarrow \sup_k |x_k^s - x_k^t| < \varepsilon \Rightarrow |x_k^s - x_k^t| < \varepsilon. \quad (1.5)$$

Diperoleh $(x_k^s)_{s=1}^\infty, \forall k \in \mathbb{N}$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Berdasarkan Teorema 2.6 diperoleh $(x_k^s)_{s=1}^\infty$ konvergen, misal ke $x_k \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$. Untuk setiap $\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \exists \forall s > n$ dan $k \in \mathbb{N}$ berlaku $|x_k^s - x_k| < \frac{\varepsilon}{3}$. (1.6)

Dibentuk $x = (x_k), \forall k \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan bahwa $x \in c_0$. Ketika x^s (baris ke s dari x) adalah barisan Cauchy, $\exists M \ni k, l \geq M$ berlaku $|x_k^s - x_l^s| < \frac{\varepsilon}{3}$.

$\forall s \geq n$ dan $k, l \geq M$, berlaku $|x_k - x_l| \leq |x_k - x_k^s| + |x_k^s - x_l^s| + |x_l^s - x_l| < \varepsilon$. Diperoleh $(x_k), \forall k \in \mathbb{N}$ merupakan barisan Cauchy, berdasarkan Teorema 2.6 diperoleh $(x_k), \forall k \in \mathbb{N}$ konvergen, jadi $x \in c_0$. Berdasarkan persamaan (1.6), $\forall s > n$ berlaku $\|x^s - x\|_{c_0} = \sup_k |x_k^s - x_k| \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Dengan demikian, c_0 ruang Banach terhadap norma $\|\cdot\|_{c_0}$.

■

Teorema 3.7 Ruang $c_0 \subset c \subset l_\infty$.

Bukti. Untuk $c_0 \subset c$. Diambil sebarang $x = (x_k) \in c_0$ maka $(x_k) \rightarrow 0$. Dengan demikian (x_k) konvergen sehingga $x = (x_k) \in c$. Dengan kata lain $c_0 \subset c$.

Akan ditunjukkan $c \subset l_\infty$. Diambil $x = (x_k) \in c$, dimisalkan $(x_k) \rightarrow a \in \mathbb{R}$. Dipilih $\varepsilon = 1$ maka $\exists n_0(1) \in \mathbb{N}, \exists \forall k \geq n_0$ berlaku $|x_k - a| < 1$. Berdasarkan teorema 1.6, $\forall k \geq n_0$ berlaku $|x_k| = |x_k - a + a| \leq |x_k - a| + |a| < 1 + |a|$.

Diambil $M = \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0-1}|, |a| + 1\}$. Diperoleh $|x_k| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$ berlaku $\sup_k |x_k| \leq M < \infty$. Jadi $x = (x_k) \in l_\infty$. Dengan demikian $c \subset l_\infty$.

Kebalikan **Teorema 3.7** tidak berlaku sebaliknya, berikut ini diberikan contoh penyangkalan dari teorema 3.7:

1. $x \in c$, tapi $x \notin c_0$. Dipilih $x = (x_k) = ((1)^k), k \in \mathbb{N}$. Pada contoh (Definisi 2.2) terbukti $x_k \rightarrow 1$, sehingga $x \in c$. Karena $x_k \rightarrow 1$ maka $x \notin c_0$.
2. $x \in l_\infty$, tetapi $x \notin c$. Dipilih $x = (x_k) = ((-1)^k), \forall k \in \mathbb{N}$. Barisan $(x_k) \in l_\infty$, sebab, $\sup_k |x_k| = 1 < \infty$. Selanjutnya berdasarkan contoh (definisi 2.4) terbukti (x_k) divergen. Dengan kata lain $x \notin c$.

■