

BAB II KAJIAN PUSTAKA

A. Studi Pustaka

Peneliti mencari *referensi* terhadap beberapa penelitian yang berkaitan dengan penelitian ini sebagai acuan dalam Pemodelan Matematika untuk Penyebaran Tuberculosis Berdasarkan Model *SEIRS* (*Susceptible, Exsposed, Infected, Recovered, Susceptible*).. Berikut ini adalah beberapa penelitian yang telah dilakukan oleh peneliti sebelumnya, antara lain:

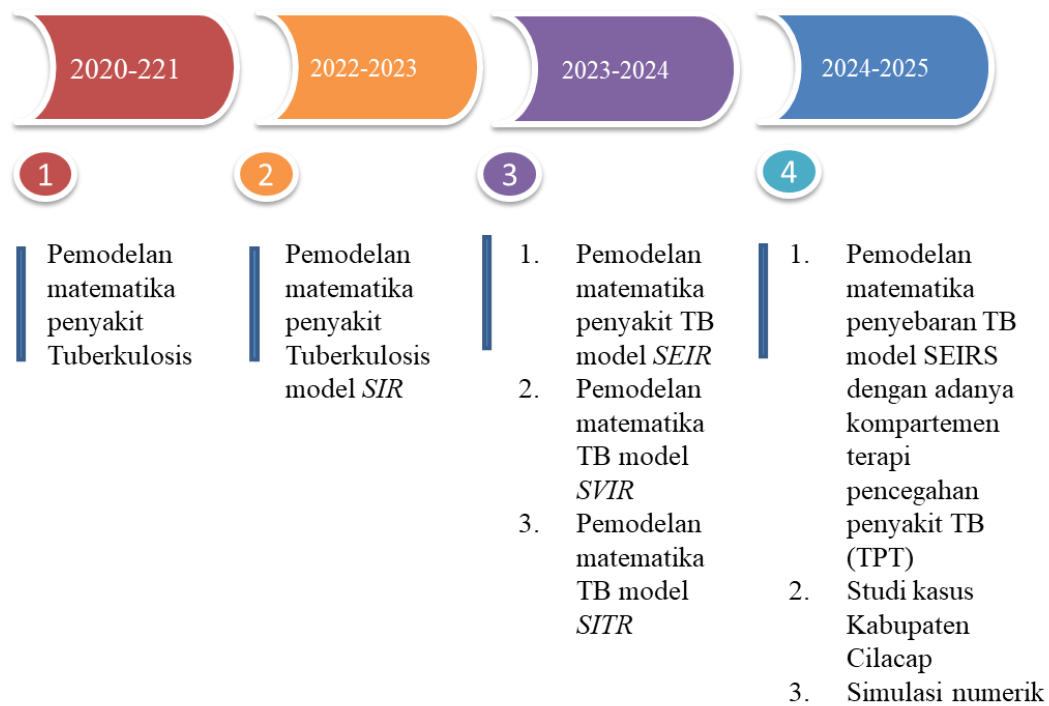
Tabel 1. Penelitian Terkait

No.	Peneliti	Keterangan Penelitian
1	Chrissyta Finka Liantoko, Lusiana Krismiyati Budiasih (Mathematical Sciences and Applications Journal Vol. 4, No. 1 2023)	Judul: Bifurkasi Mundur dalam Model Matematika Penyebaran Penyakit Tuberculosis dengan Mempertimbangkan Laju Deteksi dan Pengobatan Metode: <i>SEIR</i> (<i>Susceptible, Exposed, Infected, Recovered</i>) Hasil Penelitian: Pada penelitian ini model matematika mempertimbangkan 4 kelompok, yaitu kelompok <i>Susceptible</i> , kelompok <i>Exposed</i> , kelompok <i>Infected</i> , kelompok <i>Recovered</i> . pada penelitian ini membahas analisis titik ekuilibrium, kestabilan titik ekuilibrium dan bilangan reproduksi dasar (R_0).
4	Ariyanto, Rapmaida M. Pangaribuan, Zakarias S. Ngara dan Keristina Br Ginting (J-ICON, Vol. 10 No. 2 2022)	Judul: Analisis Estimasi Reproduksi Dasar Model Matematika Penyebaran Penyakit Tuberculosis di Bima, Indonesia. Model: <i>SEIR</i> (<i>Susceptible, Exposed, Infected, Recovered</i>) Hasil Penelitian: TB merupakan salah satu permasalahan utama yang mudah ditemukan di wilayah Kabupaten Bima Nusa Tenggara Barat. Salah satu indikator yang penting dalam matematika epidemiologi adalah reproduksi dasar. Oleh karena itu, penelitian ini dilakukan untuk mengetahui nilai

No.	Peneliti	Keterangan Penelitian
		bilangan reproduksi dasar, dan relasi antara laju kesembuhan penyakit dan nilai reproduksi dasar menggunakan model matematika untuk dinamika penyebaran penyakit TB di Kabupaten Bima. Metode yang digunakan adalah metode <i>early-take off-rate</i> , yakni mengestimasi pertumbuhan awal populasi terinfeksi. Berdasarkan hasil analisis data penelitian, penyebaran penyakit TB berada pada rentang antara 2 dan 3. Penyebaran penyakit TB di Kabupaten Bima akan menghilang dari populasi bila nilai laju transmisi penyakit berada dibawah angka 0,168 dengan laju kesembuhan semakin besar atau masa pengobatan semakin singkat.
6	Naurah Zahwa, Ulya Nabilla, Nurviana (Jurnal Pendidikan Matematika dan Sains , Vol. 10,No. 1 2022)	Judul: Model Matematika Sitr pada Penyebaran Penyakit <i>Tuberculosis</i> di Provinsi Aceh Model: SITR Hasil Penelitian: Hasil penelitian melibatkan empat kompartemen populasi yaitu <i>Susceptible</i> (S), <i>Infective</i> (I), <i>Treatment</i> (T), dan <i>Recovery</i> (R). Dari penelitian tersebut diperoleh model SITR, dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Dan diperoleh nilai reproduksi dasar $R_0 = 0,124010090$.
9	Azkia Khairah Jamil, Yuni Yulida, Muhammad Ahsar Karim (Epsilon Vol. 17 No. 1 2023)	Judul: Analisis Kestabilan dan Solusi Numerik pada Model <i>SEIR</i> untuk Penyakit Tuberkulosis Model: <i>SEIR</i> (<i>Susceptible, Exposed, Infected, Recovered</i>) Hasil Penelitian: Penelitian ini menjelaskan model <i>SEIR</i> untuk penyebaran TB dengan menentukan titik ekuilibrium dan Bilangan Reproduksi Dasar serta menganalisis kestabilan pada model <i>SEIR</i> dan membuat simulasi numerik. Metode yang

No.	Peneliti	Keterangan Penelitian
		digunakan untuk mencari Bilangan Reproduksi Dasar menggunakan metode <i>NGM (Next Generation Matrix)</i> . Selanjutnya dilakukan analisis kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dan diapat bahwa model stabil asimtotik lokal dengan syarat $R_0 < 1$, sedangkan pada titik ekuilibrium endemic didapat model stabil asimtotik lokal dengan $R_0 > 1$. Simulasi numeric disajikan untuk memperkuat penjelasan dari analisis kesatabilan dengan menggunakan parameter yang memenuhi syarat kesatbilan.
10	P Widyaningsih, A A Nugroho, D R S Saputra and Sutanto (ISNPINSA	Judul: Mathematical transmission analysis of SEIR tuberculosis disease model Model: <i>SEIR (Susceptible, Exposed, Infected, Recovered)</i> Hasil Penelitian: Pada penelitian ini menganalisis model penyebaran penyakit tuberculosis dengan mempertimbangkan 4 kompartemen. Melakukan analisis pada titik ekuilibrium bebas penyakit, titik ekuilibrium endemik dan mencari nilai bilangan reproduksi dasar.pada model ini diindikasikan stabil secara lokal maupun global.

Untuk kebaruan dalam penelitian ini pada 5 tahun terakhir dapat ditunjukkan sebagai berikut :



Gambar 1. Kebaruan Penelitian

A. B. Landasan Teori

1. Tuberkulosis

Tuberkulosis (TB) merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium Tuberculosis* [1]. Penyebarannya melalui udara dari penderita penyakit TB ke orang lain. Penularan tuberkulosis terjadi melalui cairan penderita TB aktif pada saat bersin, batuk, berbicara, atau meludah [2]. Penyakit TB termasuk kedalam penyakit yang mematikan dan menular tanpa melihat usia dan jenis kelamin. Gejala awal yang muncul pada penderita penyakit TB diantaranya [3]:

- a. Penurunan berat badan selama tiga bulan
- b. Demam lebih dari satu bulan
- c. Batuk lebih dari satu minggu dan dahak bercampur dengan darah
- d. Nyeri dada
- e. Sesak nafas
- f. Turunnya nafsu makan
- g. Lemas
- h. Mudah berkeringat malam

Tuberkulosis dapat cepat menyerang individu apabila kondisi imun atau kekebalan daya tahan tubuhnya sedang menurun. Apabila, ketika individu dalam kondisi diantara baik dan setengah sakit maka kemungkinan bisa terinfeksi bakteri tuberkulosis tetapi dalam kondisi tuberkulosis laten. Yang dimana kondisi tersebut bakteri dalam tubuh dalam posisi tidur atau tidak berkembang.

Terapi pencegahan tuberkulosis (TPT) merupakan salah satu upaya pencegahan TB untuk mengurangi bakteri menyebar dan mencegah penularan penyakit tuberkulosis. Adapun individu yang diberikan TPT yaitu individu yang serumah dengan pasien TB, individu yang memiliki kekebalan tubuh yang lemah, individu yang sering berinteraksi dengan pasien TB [6].

2. Persamaan diferensial

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat turunan dan fungsinya[9]. Terdapat 2 bentuk persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial otonom dan persamaan diferensial non-otonom. Berikut merupakan persamaan diferensial :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1)$$

Dan

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (2)$$

Persamaan (1) merupakan persamaan diferensial otonom karena hanya bergantung pada satu variabel x dan persamaan (2) merupakan persamaan diferensial non-otonom karena bergantung pada variabel x dan t .

Sistem persamaan diferensial merupakan persamaan diferensial yang terdiri dari dua atau lebih persamaan diferensial. Bentuk umum dari sistem persamaan diferensial ditulis sebagai berikut :

$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

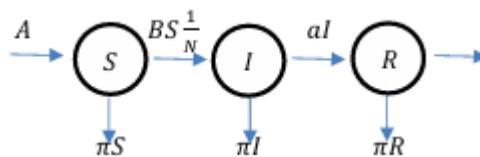
3. Model *SEIRS*

Pemodelan matematika adalah gambaran penyederhanaan suatu masalah dalam dunia nyata yang dituangkan dalam pernyataan matematik. Model *SIR* merupakan model dasar tentang penyebaran penyakit yang diperkenalkan pertama kali oleh Karmack & Mc Kendrick pada tahun 1927. Model *SIR* dapat dimodifikasi menjadi beberapa model matematika seperti, *SEIR*, *SEIRS* dan lain sebagainya[10]. Berikut contoh model *SIR* (*Susceptible, Infected, Recovered*) dan *SEIR* (*Susceptible, Exsposed, Infected, Recovered*) :

Contoh pada model teori epidemik *SIR* (*Susceptible, Infected, Recovered*) untuk penyakit TB dapat diilustrasikan pada (Gambar 2) [11]. Asumsi-asumsi yang digunakan:

1. Tidak ada imigrasi atau kelahiran dan kematian murni
2. Kelompok kedua merupakan kelompok yang terinfeksi akan dipengaruhi oleh jumlah kontak antara kelompok pertama (orang yang belum terinfeksi) dan kelompok kedua (orang yang saat ini terinfeksi) dan jumlah orang pulih atau yang meninggal setelah terinfeksi.
3. Kelompok terakhir hanya akan terpengaruh dengan jumlah orang yang sembuh atau meninggal setelah terinfeksi virus TB.

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut dapat diilustrasikan diagram transmisi model *SIR* (*Susceptible, Infected, Recovered*) sebagai berikut :



Gambar 2. Model *SIR*

Deskripsi parameter dan variable yang pada model *SIR* penyebaran TB sebagai berikut :

S = Individu yang rentan terhadap TB

I = Jumlah individu yang terinfeksi TB

R = Jumlah individu yang sembuh dari TB

A = Tingkat kelahiran atau migrasi

B = Tingkat penularan TB

α = Tingkat kesembuhan untuk TB

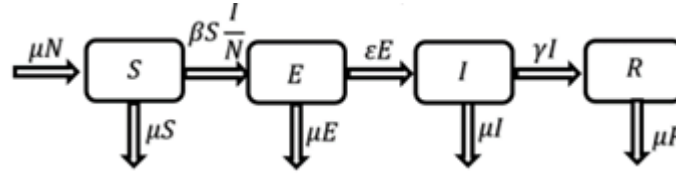
δ = Tingkat kematian TB

π = kematian alami

Sedangkan contoh penerapan model teori endemik *SEIR* (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*) untuk penyebaran penyakit TB dapat dilihat pada ilustrasi (Gambar 3)[12]. Pada penyebaran penyakit TB menggunakan model *SEIR* diasumsikan sebagai berikut :

1. Kelompok rentan (*Susceptible*) dilambangkan dengan $S(t)$ menyatakan jumlah individu yang sehat namun rentan terinfeksi penyakit TB pada saat t .
2. Kelompok terpapar (*Exposed*) dilambangkan dengan $E(t)$ menyatakan jumlah individu yang terpapar dikarenakan adanya interaksi dengan individu terinfeksi TB namun individu ini belum dapat menularkan ke individu lain pada saat t .
3. Kelompok terinfeksi (*Infected*) dilambangkan dengan $I(t)$ menyatakan jumlah individu yang telah terinfeksi TB pada saat t .
4. Kelompok sembuh (*Recovered*) dilambangkan dengan $R(t)$ menyatakan sembuh dari infeksi TB pada saat t .
5. Tingkat kelahiran dan kematian setiap individu pada setiap kelompok diasumsikan sama, dan dinotasikan dengan μ
6. Individu yang kontak langsung dengan individu lain yang terinfeksi TB menjadi terpapar (virus pada individu ini dalam masa inkubasi dan dianggap belum bisa menularkan ke individu lain).
7. Setiap individu yang terpapar dan telah melewati masa inkubasi menjadi individu yang terinfeksi TB.
8. Individu yang telah sembuh dari penyakit TB akan langsung masuk ke kelompok *Recovered*.
9. Kematian akibat penyakit TB tidak dimasukkan dalam model ini, artinya dianggap tidak terjadi kematian karena TB.
10. Diasumsikan bahwa semua individu memiliki tingkat interaksi yang sama.

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut dapat diilustrasikan diagram transfer sebagai berikut :



Gambar 3. Model SEIR

Pada (Gambar 3) menjelaskan apabila μN masuk ke dalam kelompok *Susceptible* (rentan) kemudian bisa mati alami sebesar μS . Dari kelompok rentan masuk ke kelompok *Exposed* (terpapar) ketika ada penularan sebesar $\beta S \frac{I}{N}$ dan bisa mati alami sebesar μE . Kemudian kelompok yang terpapar bisa terinfeksi ketika ada Laju aktivasi virus (seseorang yang terekpos menjadi infeksi penyakit TB) sebesar ε dan mati alami sebesar μI . Kelompok terinfeksi bisa sembuh ketika ada laju kesembuhan sebesar γ dan mati alami sebesar μR .

Parameter-parameter yang digunakan dalam model tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut.

μ : Laju Kelahiran/laju kematian

γ : Laju kesembuhan

β : Laju infeksi/penularan

ε : Laju aktivasi virus (seseorang yang terekpos menjadi infeksi penyakit TB)

N : Total individu dalam populasi

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t) \quad (1)$$

Berdasarkan penjelasan tersebut, diperoleh model matematika SEIR penyakit TB sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \mu S - \frac{\beta SI}{N}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (\mu + \varepsilon)E$$

(2)

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon E - (\mu + \gamma)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R$$

Dari persamaan (1) diperoleh $\frac{dN}{dt} = 0$ yang memiliki arti bahwa $N(t)$ konstan. Kemudian model diubah menjadi *non-dimensional*. Proporsi jumlah individu masing-masing subpopulasi dapat dinyatakan dengan $S = \frac{S}{N}, E = \frac{E}{N}, I = \frac{I}{N}, R = \frac{R}{N}$ dari persamaan (1) dapat ditentukan bahwa $S + E + I + R = 1$. Selanjutnya persamaan (2) menjadi

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \mu S - \beta IS$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta IS - (\mu + \varepsilon)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon E - (\mu + \gamma)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R$$

Berdasarkan contoh *SIR* (*Susceptible, Infected, Recovered* dan *SEIR* (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered* diatas peneliti mengembangkan model menjadi *SEIRS* (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered, Susceptible*). Model matematika yang digunakan pada penelitian penyakit TB ini adalah model *SEIRS* (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered, Susceptible*). Model *SEIRS* terbagi menjadi empat kelompok yaitu kelompok individu rentan (*Susceptible*), kelompok individu terapi (*Exposed*), kelompok individu infeksi (*Infected*), dan kelompok individu sembuh (*Recovered*). Model *SEIRS* (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered, Susceptible*) merupakan model matematika untuk mendeskripsikan suatu penyakit dimana ada kelahiran masuk ke kelompok individu rentan dan setiap individu memiliki kesempatan yang sama untuk terpapar TB. Daya tahan tubuh setiap individu berbeda berbeda sehingga sebagian individu yang berkembang cepat langsung masuk ke kelompok terinfeksi karena adanya kontak langsung dengan terinfeksi TB dan sebagian masuk ke kelas eksposed terlebih dahulu baru masuk ke kelompok infeksi. Individu yang sudah sembuh dari penyakit TB mendapatkan kekebalan

sementara dan bisa terkena kembali disaat imun tubuh yang berkurang sehingga menjadi rentan kembali.

4. Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium adalah titik yang secara waktu tidak berubah dan memiliki kesetimbangan yang tetap. Titik ekuilibrium digunakan untuk menghitung jumlah nilai dari bilangan reproduksi dasar[13]. Titik ekuilibrium dapat diklasifikasikan menjadi dua yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit merupakan suatu kondisi dimana individu sudah tidak terserang penyakit. Titik ekuilibrium endemik merupakan suatu kondisi di mana penyakit selalu ada didalam populasi [14].

5. Bilangan Reproduksi Dasar (Basic Reproduction Number)

Bilangan reproduksi dasar merupakan jumlah rata-rata individu rentan yang terinfeksi secara langsung oleh individu terinfeksi dan masuk ke dalam populasi di mana terdapat individu rentan secara keseluruhan[14]. Fungsi dari bilangan reproduksi dasar yaitu untuk mengetahui apakah suatu penyakit dapat mewabah atau hilangan dari suatu populasi. Parameter R_0 memiliki nilai ambang batas 1. Ada tiga kemungkinan yang akan muncul [14]:

1. Jika $R_0 < 1$ maka penyakit akan hilang
2. Jika $R_0 = 1$ maka penyakit akan tetap ada.
3. Jika $R_0 > 1$ maka penyakit akan menjadi mewabah